

幾何学的調査法の応用

点を数えて長さや面積を推定する

芳賀 敏郎

1 交点を数えて長さを推定する

1.1 Buffon の針投げ実験

George Louise Buffon (1707 ~ 1788) は有名な実験を行った。

Buffon は、平面に間隔 1 で平行直線群を引く、その上に長さが 1 の針をランダムに投げるとき、針が平行直線の何れかと交わる確率 p は

$$p = \frac{2}{\pi} \approx 0.63662 \quad (1.1)$$

となるということを示した。

落とした針の本数を n 、その内平行線と交わった本数を x とする。針が平行線と交わる割合 x/n の期待値 $E[x/n]$ は $p = 2/\pi$ となる。すなわち、

$$E\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{2}{\pi} \quad (1.2)$$

となる。

Buffon は、十分大きな n について実験して x を求め、それから、円周率 π を

$$\hat{\pi} = \frac{2n}{x} \quad (1.3)$$

として推定した。

表示 1.1 の左は、 $n = 60$ 本の針を落とすという実験をパソコンでシミュレートした結果である。

表の下に、 x 、 n 、 p とその理論値が求められている。 n が 60 と小さいので、実験値は理論値と少し外れるが、実験を繰り返して平均すると理論値に接近する。

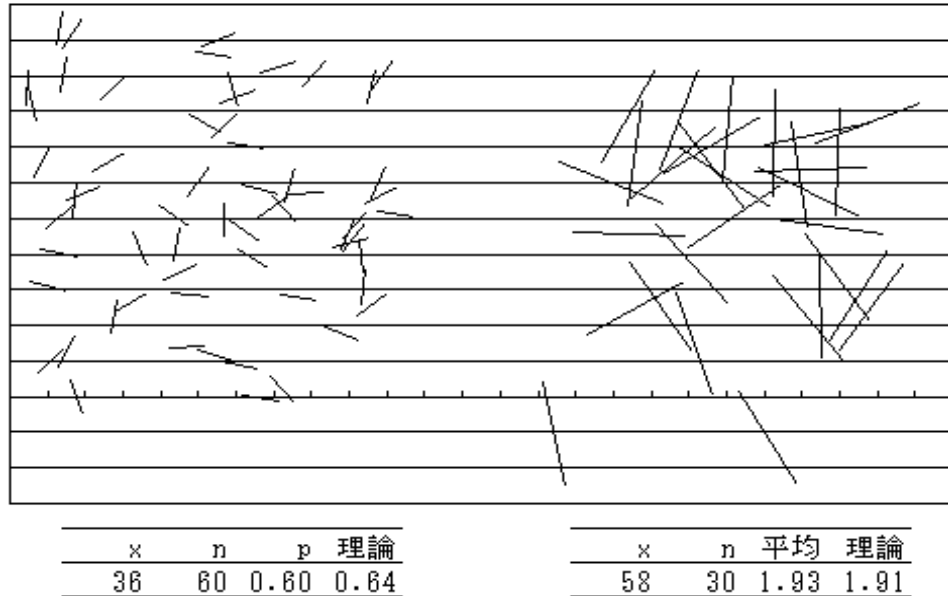
平行線の間隔を d 、針の長さ l とし、 $l \leq d$ のときは、

$$E\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{2l}{d\pi} \quad (1.4)$$

となる。

l が d より大きいときは、針金が平行線と 2 回以上交わることがあり、式(1.4) は成立しない。

表示 1.1: Buffon の針投げ実験 ($l = 1$) と $l = 3$ の場合



1.2 交点の個数の期待値

針の長さ l が平行線の間隔 d と等しいか、または、短い場合は、1本の針が平行線と交わる回数 c は 0 または 1 で、交点の個数 c の期待値は交わる確率に等しい。

$$E[c] = E\left[\frac{x}{n}\right] = \frac{2l}{d\pi} \quad (1.5)$$

$l > d$ の場合は c が 2 以上の値をとることがあるが、式(1.5)はこの場合も成立する。表示 1.1 の右は $l = 3$ の針を 30 本落とした場合のシミュレーションの結果を示す。ここで、 x は交点の総数である。

式(1.5) から予想される平均交点数は $\frac{2 \times 3}{1 \times \pi} = 1.91$ で、30本の針の平均交点数 $\frac{58}{30} = 1.93$ はこの値に近い。

これまでは真っ直ぐな針を考えたが、針が曲がっている場合はどうなるであろうか？

長さが l の曲がった針は、長さが δl の短い直線の連結と考えれば、 $E[c]$ は $2\delta l/\pi$ を積分したものとなり、式(1.5) は長さが l の曲線についても成立する。

n 本の針があり、それぞれの長さを l_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とする。針の全長を L 、交点の個数の合計を C とする。 C の期待値は

$$E[C] = E\left[\sum_{i=1}^n c_i\right] = \frac{2 \sum l_i}{d\pi} = \frac{2L}{d\pi} \quad (1.6)$$

であって、式(1.5) は l と c を、全長 $L = \sum l_i$ と平行線との交点の総数 $C = \sum c_i$ に拡張しても成立する。

針の長さは一定である必要はなく、長さや形が不揃いの曲線であっても、その全長が L であれば式(1.6)は成立する。

このように、平行線と交わる確率を交点数の期待値に置きかえることにより、得られた式(1.5)、式(1.6)は広い範囲に適用することができる。

1.3 曲線の全長の推定

Buffon は p から π を推定したが、 π の値が分かれば、式(1.6)を逆に使って、任意の曲線の長さ L を交点の総数 C から推定することができる。

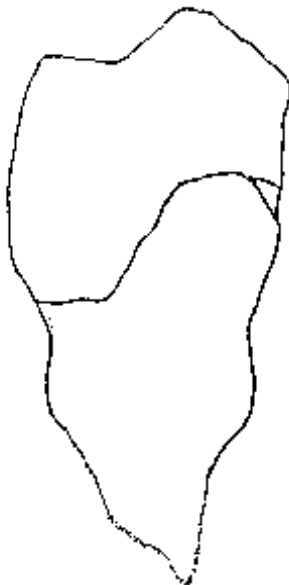
$$\hat{L} = \frac{d\pi}{2} \cdot C \quad (1.7)$$

Buffon は平行直線群の上に針をランダムに落としたが、逆に、長さを予測したい曲線の上に間隔が d の平行直線群をランダムに重ねても上の関係は成立する。

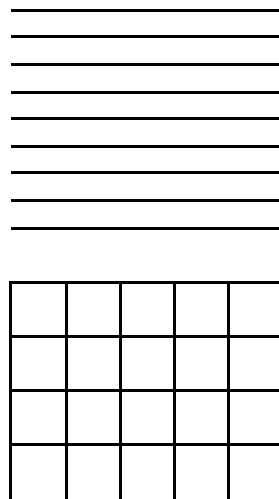
実験1 表示1.2は首都圏JRの一部(山手線、総武線、中央線)の地図である。縮尺は2万分の1であるから、図上の5mmが実尺1kmに対応する。山手線だけに着目して、その全長 L を推定するための実験をする。

$d = 5\text{mm}$ 間隔の平行線を引いた半透明の紙を準備する。これを地図にランダムに重ねて、山手線と平行線との交点の個数 C を数える。重ねるに当たっては、上下左右の位置をランダムに決めるだけでなく、方向もランダムに決める必要がある。

表示1.2: 東京のJRの地図



表示1.3: 平行線と格子



1回の試行では精度が不十分であるから、複数回繰り返し、 C_1, C_2, \dots, C_n を得る。式(1.7)を使って、 $\hat{L}_i = (d\pi/2) \cdot C_i$ を計算する。

\hat{L}_i の平均と標準偏差を計算し、 L の信頼区間を求める。

表示1.3上の5mm平行線の代わりに、表示1.3下の10mm間隔の格子を用いて同じ実験を試みる。10mmの格子は、5mm間隔の平行線を1本置きに2つに分け、90度回転して重ねたものと考えれば、交点数 C の期待値は同じであると予想される。

上の予想は実験で確かめることができる。

実験してみると、2つの方法で、交点数(または全長)の平均値間に有意差のないことが分かる。しかし、標準偏差には差がある。すなわち、格子を用いると、平行線の場合よりも、標準偏差が小さくなり、推定精度が改善する。山手線は南北に長いので、平行線を重ねる方向によって交点の個数が変化する。格子を用いることにより、方向のランダム化が改善されたためである。これは、実験計画法で、単純無作為化法よりも、乱塊法の方が実験の効率が改善されることと同じ原理である。

補足 格子の代わりに、60度ずつ回転した3つの平行線群を用いると、さらに推定精度を向上させることができるであろう。しかし、その改善は僅かであって、特別のスクリーンを作成する手間を補うほどのものではないと考えられる。

応用 壁面や製品表面の亀裂長さを測定したり、野生動物の足跡から1日の平均移動距離を推定したり、などに応用することができるであろう。

1.4 平均長の推定

n 本の曲線があり、それぞれの長さを l_i とする。平均長さ \bar{l} を推定したい。

全長 L を推定し、本数 n を数えて、平均長を推定することができる。

$$\hat{\bar{l}} = \frac{\hat{L}}{n} = \frac{d\pi}{2} \cdot \frac{C}{n} \quad (1.8)$$

実験2 長さが100cmの細い針金(または糸)を100本に切断する。長さは不揃いとする。針金は適当に曲げる。

これを、間隔が1cmの平行線の上に落とし、平均長さを推定する。実験を繰り返して、平均長さの95%信頼区間を求める。

平行線が書かれた紙の面積(または平行線が描かれた領域)が狭く、針金を落としたとき、紙(または平行線の領域)の外に出たときどうしたら良いかを考える。

単純に考えれば、外に出た針金を除いて、 C と n を数えれば良いように思われる。しかし、この方法には

一部分が外に出た場合にはどのように判断するか

長い針金は外に出る確率が高い

の2つの問題がある。正しくは、次節に述べるような方法を採用する必要がある。

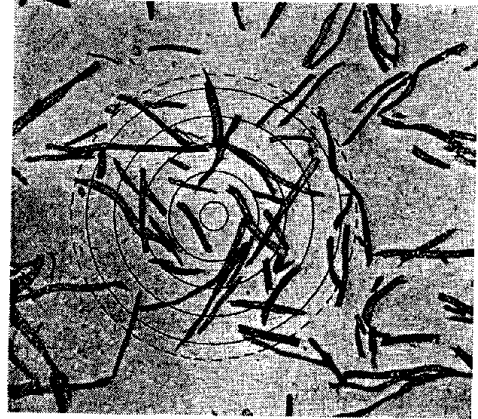
1.5 線分の全体が見えない場合

まず，具体的な問題を提起する．

紙の強度は，紙を構成する繊維の長さによって影響される．表示1.4は紙の原料となる繊維の顕微鏡写真である．ここには，四角の写真を示したが，現実の顕微鏡の視野は円形である．繊維の中には，一部分が視野の外に出るものがある．端（一方または両方）が飛び出す場合の他に，両端が内部に入り，真中が外に出る場合もある．

繊維には短いもの，長いものが混ざっている．このような写真から繊維の平均長を推定する方法を考える．

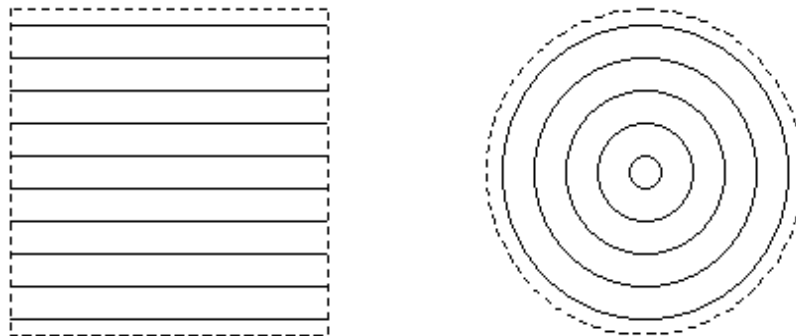
表示1.4: 繊維の顕微鏡写真



これまでは無限に広い平面を無限本の平行線で覆った場合を考えた．しかし，現実には有限の平面を取り扱う．そこで，平行線群の間隔が d であるとき，単位面積当りの線の長さ（線密度）は $1/d$ である．有限の面積を考えるときは，対象の面積 A を指定し，その中に A/d の長さの線を引くと線密度は $1/d$ となる．

長さが有限の平行線を間隔 d で引く．その両側に $d/2$ の幅を広げ，点線で囲まれた領域を A とする．これを表示1.5左に示す．

表示1.5: 平行線と同心円



線密度が $1/d$ である図形は平行線群には限らない．表示1.5右の同心円群は，半径が $0.5d, 1.5d, \dots, (k-0.5)d$ で，領域 A の半径は kd である．

領域 A の面積は $\pi(kd)^2$ ，同心円の全長は $2\pi \sum_{i=1}^k (i-0.5)d = 2\pi \left(\frac{k(k-1)}{2} - \frac{k}{2} \right) d = 2\pi \frac{k^2}{2} d$

で、線密度は $\frac{\pi k^2 d}{\pi k^2 d^2} = \frac{1}{d}$ となり、左の平行線群と同じである。

拡張した領域内の繊維の長さの合計 L は交点の個数 C を数えることによって推定できる。平均長は、長さの合計を本数で割って求められる。しかし、全体の繊維を一つの視野内で見ることができないので、本数を数えることはできない。1本の繊維には2つの末端があるから、末端の数を数え、2で割ることにより本数を求める。拡張した領域に含まれる繊維の両端の個数 t を数えてその半分を本数 n とする。

表示1.5の写真に表示1.4の同心円を重ねる。 k 本の同心円と繊維の交点数 C と、拡大円の中に含まれる末端の個数 t を数える。平均繊維長 \bar{l} は

$$\hat{l} = \frac{\hat{L}}{n} = \frac{d\pi C}{2n} = d\pi \cdot \frac{C}{t} \quad (1.9)$$

で推定される。

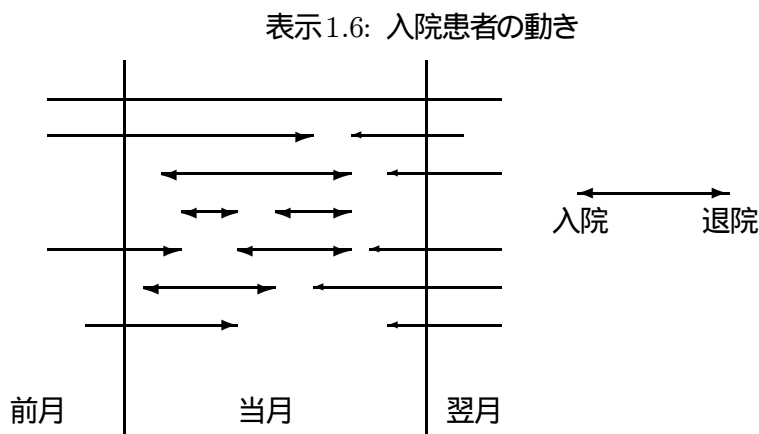
顕微鏡の視野を移動して、複数回 C_j, t_j を数える。それぞれの合計から平均繊維長が推定される。

$$\hat{l} = d\pi \frac{\sum_j C_j}{\sum_j t_j} \quad (1.10)$$

1.6 平均在院日数の推定

繊維の顕微鏡写真から平均繊維長を推定する考え方は、それとは全く無関係な場面で応用することができる。

病院の運営のためには、患者が平均何日入院するか（平均在院日数）を知ることが必要である。病床毎に、入退院を示すと表示1.6のようになる。



平均在院日数は、通常ある月に退院した患者（表示1.6では太線で示す）について、在院日数の合計を求め、退院患者数で割って求める。

その中には、何年も入院していた長期患者も含まれる。このような患者が退院した月は平均在院日数が大きくなるという問題がある。

顕微鏡の視野をある月に在院していた全入院患者に、一本の繊維を一人の患者に対応させる。視野に一部分が現れている繊維は、前月からの在院患者と、月末に在院する患者に対応する。このように考えると次の方法が考え出される。

ある月に在院したすべての患者の在院日数の合計を、その月の入院患者と退院患者の人数の合計の半分で割って平均在院日数を求めることができる。

この方法の利点は個々の患者の入院日や入院日数を調べなくても、その月の病院日誌（入院患者、退院患者、在院患者数が記録されている）だけで、平均在院日数が求められるという利点がある。

2 点を数えて面積を推定する

2.1 面積の推定

山手線の内側の面積 S を推定するために、山手線の地図の上に間隔が d の格子をランダムに重ねる（表示2.1）。

山手線の内側に含まれる格子点の個数を g とする。 g の期待値は

$$E[g] = S/d^2 \quad (2.1)$$

である。これから、面積 S の推定値は

$$\hat{S} = gd^2 \quad (2.2)$$

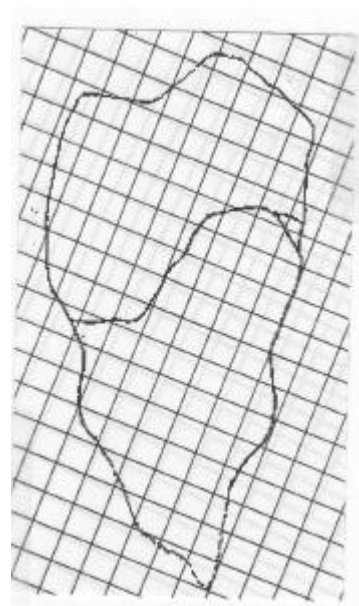
となる。

応用

長さが揃った材木がトラックに積まれて運ばれてきた。その材積は断面積の合計*長さ で求められる。トラックを真横から写真を取り、それを格子の上に投影して、材木の切り口の中の格子点の個数を数えると、断面積の合計が推定できる。

壁面の腐食面積の推定などにも利用できる。

表示 2.1: 山手線の内側の面積の推定



2.2 面積比の推定

表示2.2 は合成繊維の断面の顕微鏡写真である．表面（周辺）の白い部分は結晶化している．総断面積 S 中の結晶化面積 s の割合を知りたい．

図形に格子を重ね，面積 S と s に含まれる格子点の個数 G, g を数える．

g/G によって面積比 s/S を推定することができる．

$$\widehat{s/S} = g/G \quad (2.3)$$

表示2.2: 繊維の断面



応用

珪肺病患者の肺の損傷面積比率の推定

金属断面の顕微鏡写真から，結晶構造組成の比率を推定

都市の公園（緑地）面積比率の比較

格子を重ねる代わりに，面積 S にランダムに G 個の点を落とし，面積 s 内に落ちた点の数 g を数えても式(2.3)の式は成立する．

総面積 S が既知であれば，部分面積 s は

$$\hat{s} = \frac{g}{G} S \quad (2.4)$$

で推定できる．

2.3 Bitterlich 法による胸高面積の推定

(1) Bitterlich 法

面積が S の林の中に沢山の立木がある．地上120cmの直径は胸高直径といわれ，これから断面積を求め，その林の平均直径に対する係数を掛けて，その林の立木の材積が推定される．これは毎木調査と言われ，大変な労力を必要とする．

胸高断面積の合計 s を求める方法があれば，大変便利である．

地上120cmでの断面の地図があれば，その上にランダムに G 個の点を落とし，それが木の断面に落ちる個数 g を数えれば，式(2.4)を用いて胸高断面積 s を推定することができるであろう．

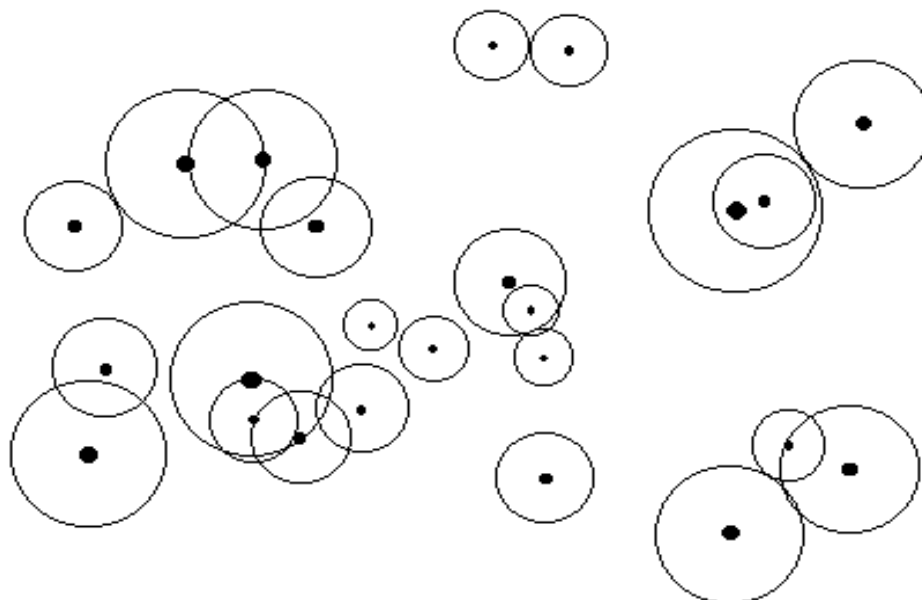
しかし，断面の地図を作ることにはできない．また， s/S は極めて小さく，十分な精度で s/S を推定するためにはランダムに落とす点の数 G を極端に大きくしなければならない．

この問題を解決する方法を Bitterlich が考案した．

樹木の胸高半径 r を f 倍することにより，断面積 s は f^2 倍され， s/S が十分に大きな値となり，実用的な推定精度が得られる．半径を大きくした断面を拡大断面と呼び，その面積を s' で

表すことにする．林には沢山の木が立っており，拡大断面は重なることが起こる．断面と拡大断面の例を表示2.3に示す．

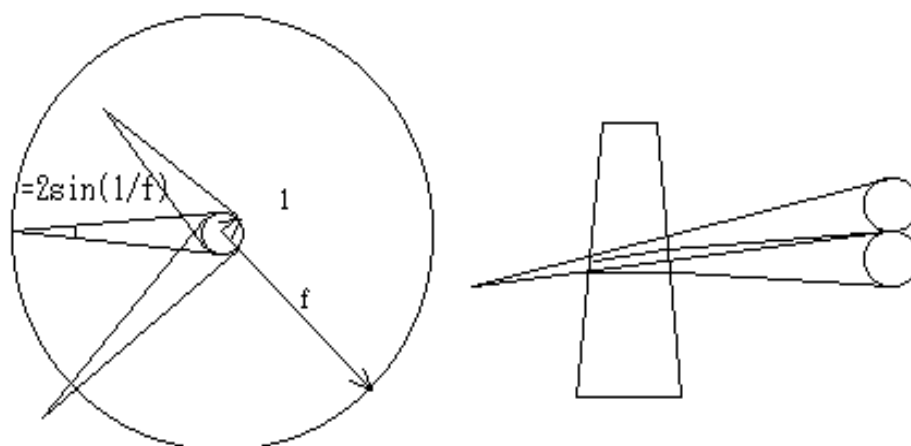
表示2.3: 木の断面と拡大断面



林内のある点が拡大断面の中にあるかどうかは次の方法で判定される．その点から木の胸高直径の視角 θ を測り， $\theta > 2 \sin(1/f)$ であれば，その点は拡大断面の中に含まれる．この関係を表示2.4左に示す．

表示2.4: 視角による判定

プリズム



i 番目の観測点にはいくつの拡大断面が重なっているかは，その点から 360° を見回し，視角が

2・sin(1/f) より大きい木の本数 k_i を数えることにより知ることができる。

林の中にランダムに G 個の観測点を落とし、 $k_i (i = 1 \sim G)$ を観測する。

拡大断面の総面積 s' は

$$\hat{s}' = \frac{\sum_{k=1}^G k_i}{G} S = \bar{k} \times S \quad (2.5)$$

で推定され、 k_i の平均値に林の面積 T を掛けたものとなる。元の総断面積 s は

$$\hat{s} = \frac{\bar{k} \times S}{f^2} \quad (2.6)$$

として推定される。

Bitterlich は、3脚の上に細長い板を水平に保持し、一端に覗き穴を、それから d 離れた他端に幅が d/f の板を立てた道具を考案した。穴からのぞき、他端の板よりも太い木の本数を数える。

その後、屈折角がちょうど $2 \cdot \sin(1/f)$ となる台形プリズム（表示2.4 右）が考案され、山林調査に広く利用できるようになった。プリズムを通して見える木とプリズムの上下に見える木が重なっている木の本数を数える。

f を大きくすると、推定精度は上がるはずであるが、複数の木が重なって計数ミスが入る。そこで、 f の異なる2種類のプリズムを準備し、樹木の密度によって使い分ける。

(2) 測定方法の誤りによる偏り

プリズムを使っている現場から、同じ山林を2つのプリズムで調査すると、 f の小さいプリズムの方が大きく出る傾向があることが報告された。

その理由を知るために、調査に立ち会ったところ、次の事実を見出した。360°見まわすとき、自分の足の位置を固定して体を回転する。腕を伸ばしてプリズムを保持して、木を見る。

断面の半径を r 、腕の長さを δ とすると、拡大断面の半径 r' は

$$r' = fr + \delta$$

と、腕の長さだけ伸る。拡大断面積 s' を f^2 で割った、元の断面積の推定値と元の断面積 s の比は

$$\frac{s'/f^2}{s} = \frac{\pi(fr + \delta)^2}{f^2\pi r^2} \approx \frac{f^2r^2 + 2fr\delta}{f^2r^2} = 1 + \frac{\delta}{fr}$$

となる。上の式の第2項が偏りの原因であって、 f が小さく、細い木の場合に偏りが大きくなることが分かる。

(3) 林縁の影響による偏り

拡大断面が調査対象である面積が S である林の外に出る木がある。この面積は計測の対象外になってしまうため、断面積の推定値には - の偏りが生じる。これは前沢が東大演習林での実測によって確かめた。その後、芳賀は前沢の求めた偏りを求める近似式を導いた。

3 面積と線分の推定を併用する推定

表示2.2に繊維の断面の顕微鏡写真を示した。表面の凸凹が多いと、水分の吸収が増えるなど、繊維の性質が変化する。ここで、断面の形状を定量的に評価したい。

断面の周囲長を l 、面積を s とする。断面が半径 r の円であるとき、 l^2/s は

$$\frac{l^2}{s} = \frac{(2\pi r)^2}{\pi r^2} = 4\pi$$

となる。

形状係数を

$$\text{形状係数} = \frac{l^2}{4\pi s} \quad (3.1)$$

と定義すると、円の時に 1 となり、凸凹が増えると大きくなる。

さまざまな形状があるとき、平均の形状係数

$$\overline{\text{形状係数}} = \frac{\overline{l^2}}{4\pi \overline{s}} \quad (3.2)$$

は、右辺の l 、 s に推定値を代入して推定される。

断面の周囲の長さ l と面積 s を推定するために、顕微鏡写真の上に間隔 d の格子を重ねる。繊維断面の個数 n 、繊維の輪郭線との交点の総数 C と、繊維断面内の格子点の総数 G を数える。

周辺長さ と 断面積の平均値 l 、 s は

$$\hat{l} = \frac{d\pi}{2n} C, \quad \hat{s} = \frac{d^2}{n} G$$

で、平均の形状係数は次に式で推定される。

$$\overline{\widehat{\text{形状係数}}} = \left(\frac{d\pi}{2n} C \right)^2 / \left(4\pi \frac{d^2}{n} G \right) = \frac{\pi}{16n} \frac{C^2}{G} \quad (3.3)$$

4 あとがき

積分幾何学は1955年に日本規格協会の「品質管理方式研究会」で増山元三郎先生から教えて頂いた。

当時筆者は製紙会社の研究所に在籍しており、それを製紙原料のパルプの平均繊維長の測定に応用した。

数年後、パルプ原料の材木を調達する部門では、山林の材積量の推定にプリズムによる Bitterlich 法を利用するようになった。そこで、本文に指摘されたような偏りの生じることが経験的に見出されたが、現場の人は Bitterlich 法の根拠を知らなかったため、その理由は分らなかった。筆者は Bitterlich 法は積分幾何学から導き出されることを明らかにし、偏りの原因を定量的に説明することができた。

また、増山先生から東京大学演習林の前沢貫次郎氏を紹介された。前沢氏は、演習林で、林の周辺（林縁）で偏りの発生することを実測で確かめた。筆者は偏りを定量的に評価する式を導いた。

筆者はその後慶応義塾大学の医学部に移った。そこで、平均入院日数を求めるのに、平均繊維長の測定に使ったのと同じ考えが使えることを見出した。

本文に述べたように、極めて簡単なBuffonの針投げ実験から比較的単純な論理の展開によって多くの応用を導くことができる。現在の教育が知識を与えることが中心であって、問題解決能力の向上には役に立たないと言われている。ここに取上げたテーマは、応用統計の教育だけでなく、問題解決能力や思考力の訓練に役に立つであろう。

最後に、Buffonの針投げ実験を紹介し、それまで統計とは全く無縁であった筆者に、統計の面白さを教えて下さった増山元三郎先生に心からお礼を申し上げます。

参考文献

(1948) W.Bitterlich, "Die Winkezahlprobe", Allgemeine Forest und Holzwirtschaftliche Zeitung", Vol.59, pp.4-5.

(1953) L.A.Santalo, "Introduction to the Integral Geometry", Actualites Scientifiques et Industrielles, No.1198.

(1953) M.Masuyama, "A Rapid Method of Estimating Basal Area in Timber Survey", Sankhya, Vol.12, pp.291-302.

(1955) 増山元三郎, "積分幾何学の工学的応用", QCC-CLD 資料 No.2 日本規格協会。

(1956) 増山元三郎, "積分幾何学の応用について", 科学 Vol.26, No.11.

(1956) 増山元三郎, "幾何学的調査法の話", オペレーションズリサーチ, Vol.1, pp.41-49.

(1956) M.W.Kane, "Determination of Average Fiber Length", Tappi (Technical Association of Pulp & Paper Industry), Vol.39, pp.477-480.

(1956) C.T.Bradley, A.Bersine & J.d'A.Clark, "A Rapid Simplified Method for Determining the Coarseness of Pulp", Tappi, Vol.39, pp.40-43.

(1957) 芳賀敏郎, "積分幾何学の繊維への応用", 標準化, Vol.10, pp.18-24.

(1959) 前沢完次郎, "Bitterlich法における林縁の問題とその実験例", 演習林, No.12, pp.229-244.

(1959) T.Haga & K.Maezawa, "Bias due to Edge Effect in using the Bitterlich Method", Forest Science, Vol.5, pp.370-376.

(1962) 芳賀敏郎, "幾何学的調査法" 「現代統計学大辞典」 pp.473-474, 東洋経済新報社.